Лабораторная работа №2
Рэлеевские замирания в радиоканале

1. **Цель работы:**
   1. Оценить распределения коэффициента рэлеевских замираний.

2. **Задачи работы:**
   1. Оценить распределения коэффициента рэлеевских замираний.
3. Построить гистограммы распределений.

Теоретические сведения:

Пусть z – случайная комплексная величина с круговой симметрией:

$$z = x + jy. \qquad (1)$$

Вещественная x и мнимая y части z подчиняются нормальному распределению с нулевым средним $\mu = 0$ и дисперсией σ^2:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}; \quad p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}. \qquad (2)$$

Круговая симметрия случайной комплексной величины z означает, что выполняется следующее условие:

$$M[z] = M\left[e^{j\theta} z\right] = e^{j\theta} M[z]. \qquad (3)$$

Обозначим модуль z через $h = \mathrm{abs}(z)$, которое подчиняется закону Рэлея:

$$p\left[\mathrm{abs}(z)\right] = \frac{\mathrm{abs}(z)}{\sigma^2} e^{-\frac{\left[\mathrm{abs}(z)\right]^2}{2\sigma^2}}, \ \mathrm{abs}(z) \ge 0. \qquad (4)$$

Фаза z распределена равномерно в диапазоне $[-\pi; \pi]$:

$$p\left[\arg(z)\right] = \frac{1}{2\pi}, \ -\pi \le \arg(z) \le \pi. \qquad (5)$$

При оценке помехоустойчивости сигналов замирания моделируются комплексным коэффициентом z, вещественная и мнимая части которого имеют нормальное распределение (2).

Выражение (4) представляет собой закон изменения амплитуды, а (5) – фазы сигнала при перемещении передатчика или приемника в системах радиосвязи при многолучевом распространении.

Получим выражения (4) и (5) переходом к полярной системе координат.

Если известны прямоугольные координаты x и y точки z, то ее полярные координаты (Рис. 1) определяются по формулам:

$$h = \mathrm{abs}(z) = \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad (2.6)$$

$$\arg(z) = \theta. \qquad (2.7)$$

Пару полярных координат h и θ можно перевести в декартовы координаты путем применения тригонометрических функций синуса и косинуса:

$$x = h\cos(\theta); \quad y = h\sin(\theta); \qquad (8)$$

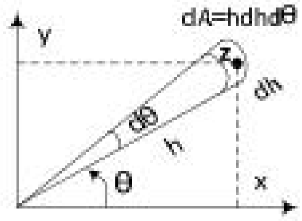


Рис. 1. Переход к полярной системе координат

СВ x и y независимы, поэтому их совместная плотность вероятности

$$p(x,y) = p(x)p(y). \qquad (2.9)$$

Подставив в (2.9) формулы (2.2), получим следующее выражение:

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}}. \qquad (10)$$

Вероятность того, что СВ $\mathrm{Re}(z)$ находится в диапазоне от x до $x+dx$, а СВ $\mathrm{Im}(z)$ – в диапазоне от y до $y+dy$, определяется выражением

$$p\left(\mathrm{Re}(z) \le x+dx,\ \mathrm{Im}(z) \le y+dy\right) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}} dxdy. \qquad (11)$$

Используя декартовы координаты, площадь бесконечно малого элемента dA может быть вычислена как

$$dA = dxdy. \qquad (12)$$

В полярной системе координат площадь dA может быть вычислена как

$$dA = Jdhd\theta, \qquad (13)$$

где J – определитель Якоби, который используется при переходе к другой системе координат и определяется выражением

$$J = \det\frac{\partial(x,y)}{\partial(h,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial h} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial h} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}. \qquad (\ .14)$$

Для полярной системы координат из (14) с учетом выражений (8) следует, что определитель матрицы Якоби равен h:

$$J=\begin{vmatrix}\cos(\theta) & -z\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & z\cos(\theta)\end{vmatrix}=z\cos^2(\theta)+z\sin^2(\theta)=z. \qquad (15)$$

Подставляя (15) в (13), получим dA в полярной системе координат: dA

$$=zdzd\theta. \qquad (16)$$

Подставляя в (11) формулы (6) и (16), получим вероятность того, что СВ h находится в диапазоне от h до $h \quad +dh$, а СВ θ – в диапазоне от θ до $\theta+d\theta$:

$$p\left(h\le h+dh,\ \theta\le\theta+d\theta\right)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{h^2}{2\sigma^2}}hdhd\theta. \qquad (17)$$

Из (17) можно записать выражение совместной ПВ СВ h и θ:

$$p(h,\theta)=\frac{h}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{h^2}{2\sigma^2}}. \qquad (18)$$

Из независимости СВ h и θ справедливо выражение

$$p(h,\theta)=p(h)\,p(\theta). \qquad (19)$$

Из (18) с учетом (19) ПВ h и θ определяются выражениями:

$$p(h)=\frac{h}{\sigma^2}e^{-\frac{h^2}{2\sigma^2}},\ h\ge 0; \qquad 2.20)$$

$$p(\theta)=\frac{1}{2\pi},\ -\pi\le\theta\le\pi. \qquad (21)$$

Выражения (20) и (21) соответствуют выражениям (4) и (5), что и требовалось доказать.

Оценим плотность вероятности $p(\gamma)$ мгновенного отношения сигнал/шум γ в радиоканале с AWGN и рэлеевскими замираниями.

В радиоканале с AWGN и рэлеевскими замираниями амплитуда приня-того сигнала y определяется выражением

$$y=hx+n \quad , \qquad (22)$$

где x – переданный сигнал; n – аддитивный белый гауссов шум с ПВ (8); h – коэффициент замираний с ПВ (20).

Мгновенное SNR в радиоканале с AWGN и рэлеевскими замираниями определяется выражением

$$\gamma=h^2\frac{\gamma_0}{2\sigma^2}. \qquad (\ .23)$$

Параметр $2\sigma^2$ нормирует мощность y и принимается равным единице. Для ПВ мгновенного SNR $p(\gamma)$ справедливо следующее соотношение:

$$p(\gamma)d\gamma = p(h)dh. \qquad (24)$$

Из (24) следует, что

$$p(\gamma) = \frac{p(h)dh}{d\gamma}. \qquad (25)$$

Из (23) следует, что

$$d\gamma = \frac{h}{\sigma^2}\gamma_0 dh. \qquad (26)$$

Подставив в (25) формулы (20) и (26), получим следующее выражение:

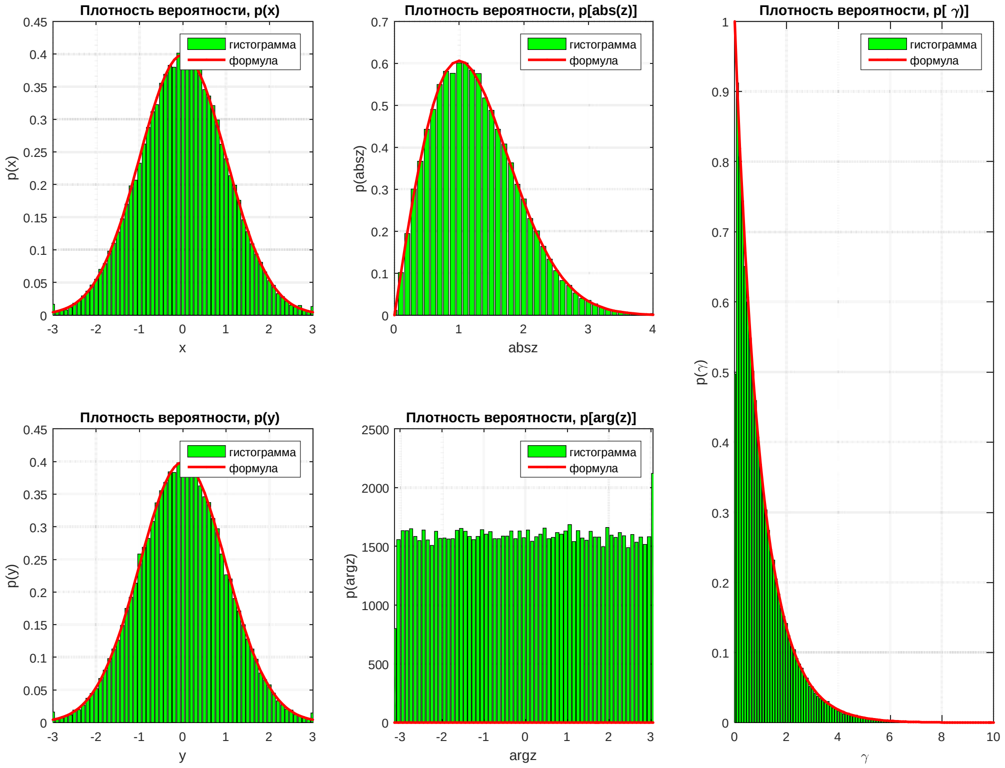
$$p(\gamma) = \frac{\frac{h}{\sigma^2} e^{-\frac{h^2}{2\sigma^2}} dh}{\frac{h}{\sigma^2}\gamma_0 dh} = \frac{1}{\gamma_0} e^{-\frac{h^2}{2\sigma^2}}. \qquad (27)$$

Подставив в (27) формулу (23), получим следующее выражение:

$$p(\gamma) = \frac{1}{\gamma_0} e^{-\frac{\gamma}{\gamma_0}}, \qquad (28)$$

4. <u>Выполнение работы в программе Matlab:</u>

5. <u>Построение графиков:</u>



Интервал выборок случайной величины **увеличен в 5 раз**

Дисперсия **увеличена в 2 раза**

6. Выводы: